



日本音響学会 2013年 秋季研究発表会  
音響学入門ペディアセッション

## Q2. $z$ 変換をやさしく教えてください

高道 慎之介

(奈良先端科学技術大学院大学, 学生・若手フォーラム幹事会)

# はじめに



z変換を学ぶ機会は少なからずあったはず

“時間信号  $x(n)$  のz変換  $X(z)$  は, ...で与えられる。”

“零点と極”

“ $z^{-1}$ は時間遅れを表す”

“伝達関数”

“安定性”

“フーリエ変換との関係”

⇒ 色々なキーワードが出てくるけど, 結局z変換って何なの？

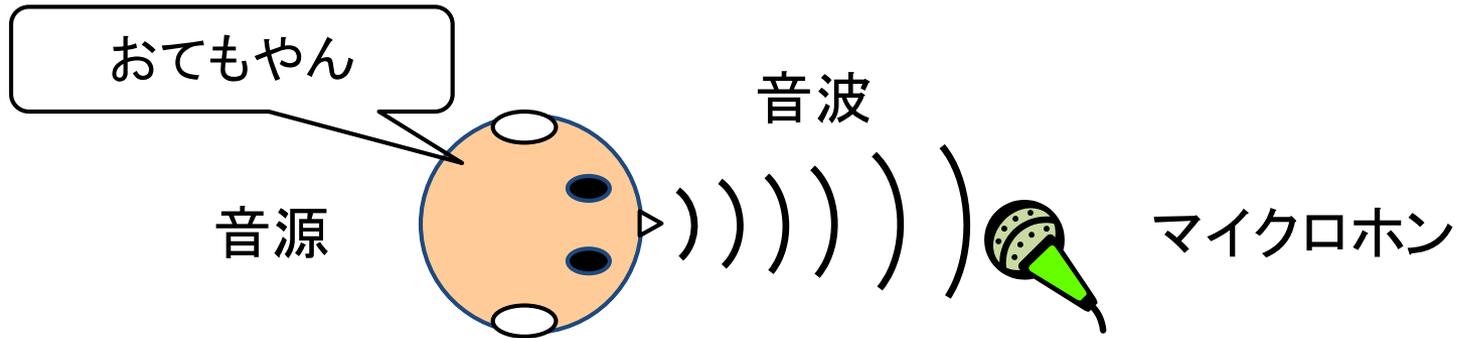
⇒ z変換した結果と実際の音波ってどんな関係があるの？

本スライドではこれらの疑問に答えてきます！

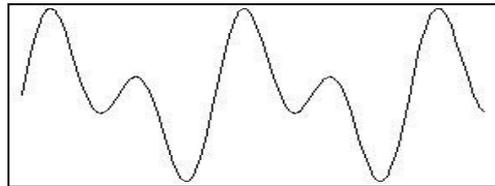


**Z変換って何なの？**

# z変換の前に：波の足し合わせによる表現

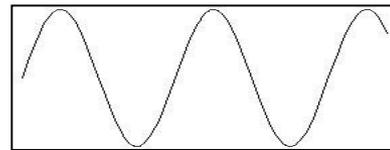


收音された時間波形



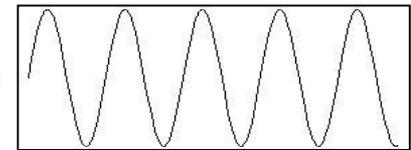
=

波1



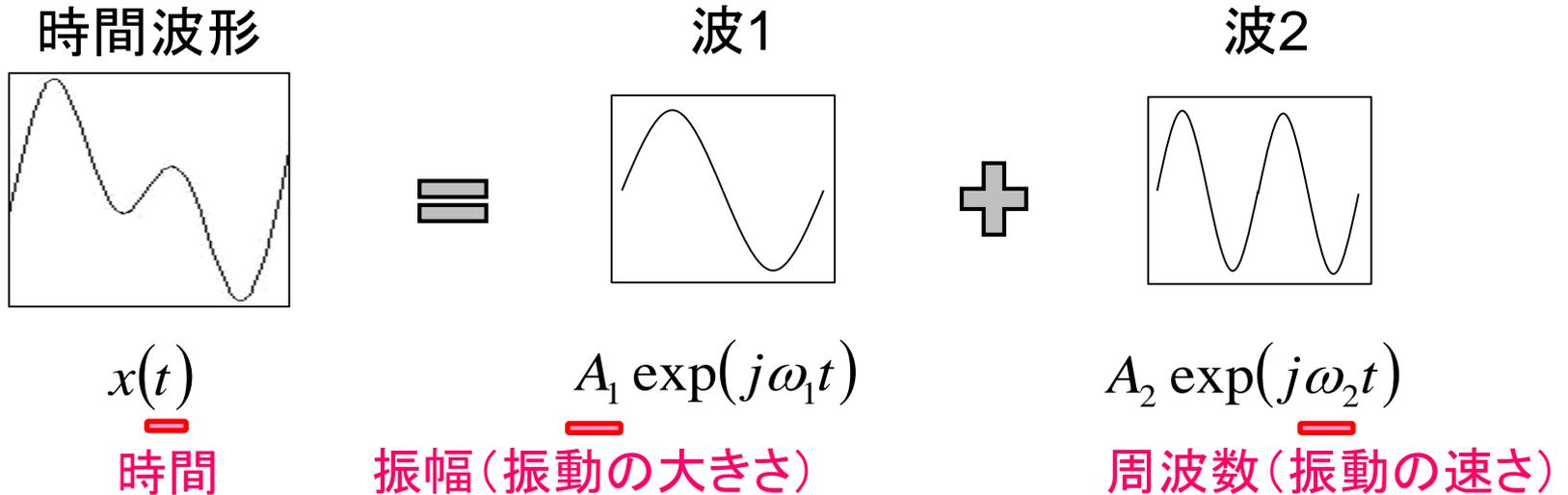
+

波2



時間波形を”何かの波”の足し合わせで表現することで、  
その波形の特徴を解析することが可能

# フーリエ変換



\* 位相(振動の時間遅れ)もあるが省略

指数部が虚数だと、振動する波

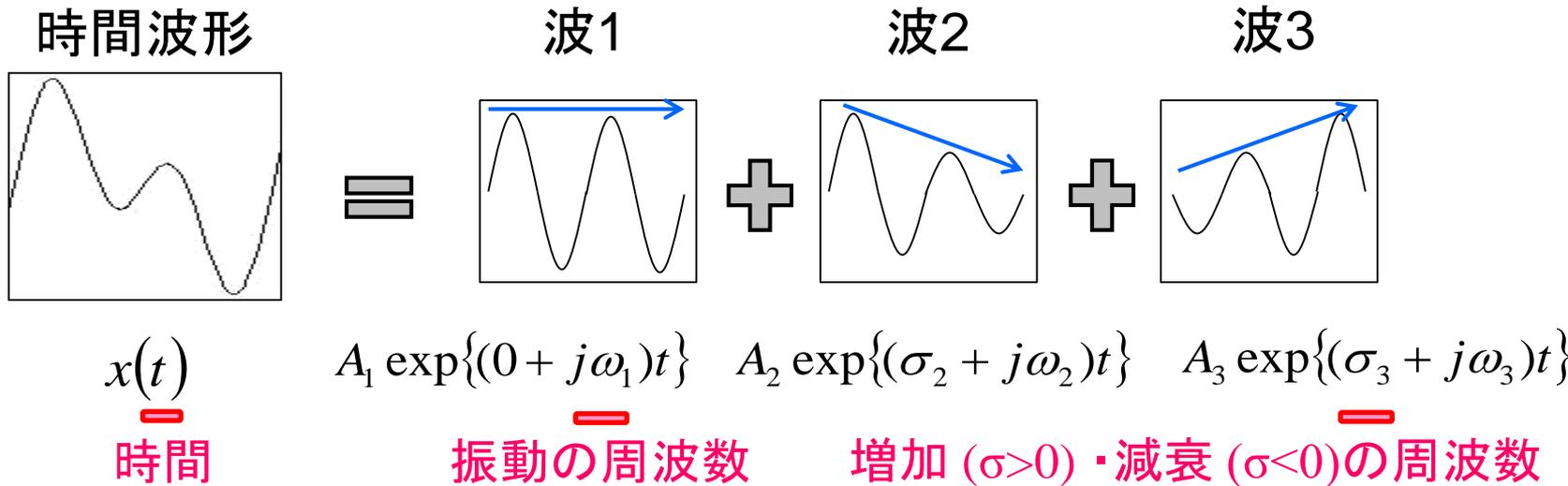
フーリエ変換とは...

時間波形を  $\exp(j\omega t)$  の波の足し合わせで表現する方法

時間的に一定の振幅で周期振動する波

時間波形って振動するだけなのか? ➡ ラプラス変換の導入

# ラプラス変換



指数部が複素数だと、振動・増加/減衰

ラプラス変換とは...

時間波形を  $\exp\{(\sigma + j\omega)t\}$  の波の足し合わせで表現する方法

時間的に振幅が増加/減衰しながら振動する波

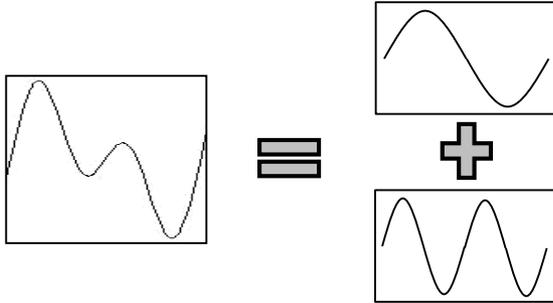
デジタル計算機で処理できないか？

離散時間に対応する  
手法が登場

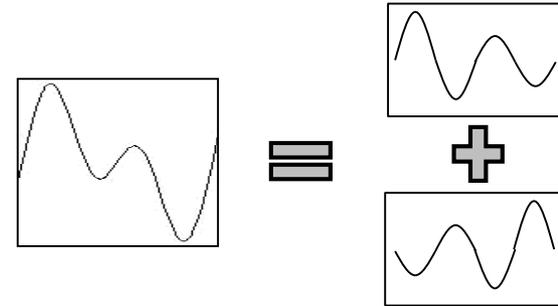


連続時間

振動する波  
フーリエ変換

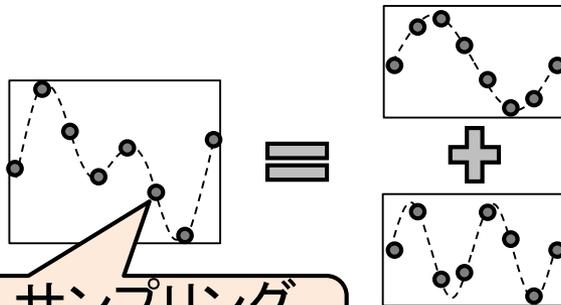


振動・増加/減衰する波  
ラプラス変換



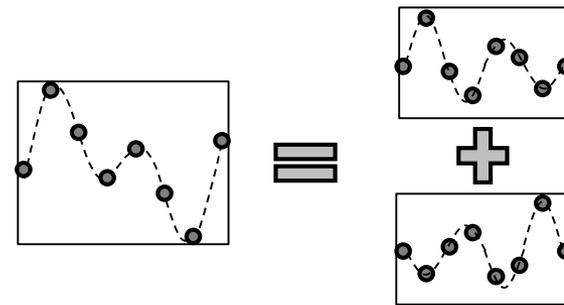
離散時間

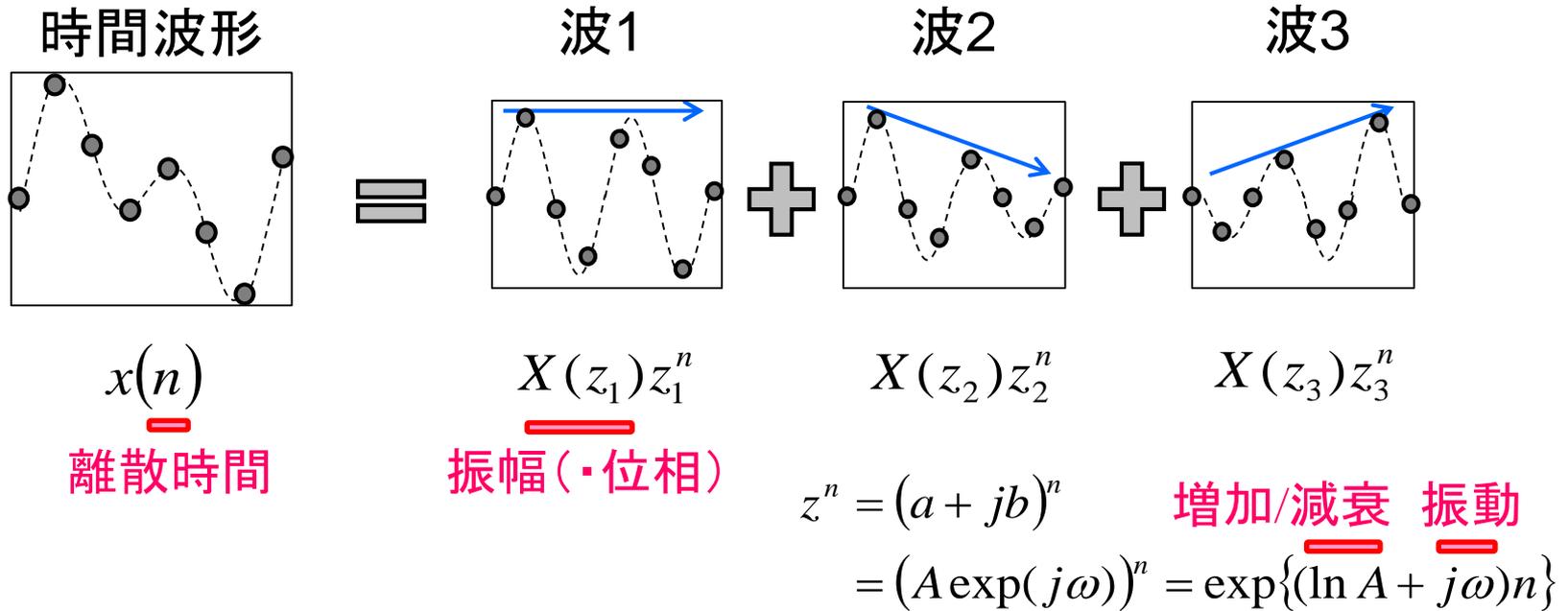
離散フーリエ変換



サンプリング  
された点

z変換





## z変換とは・・・

離散時間波形を  $z^n = (a + jb)^n$  の波の足し合わせで表現する手法

時間的に振幅が増加/減衰しながら振動する波

z変換という呼び方は、連続時間のラプラス変換(s変換)に対応

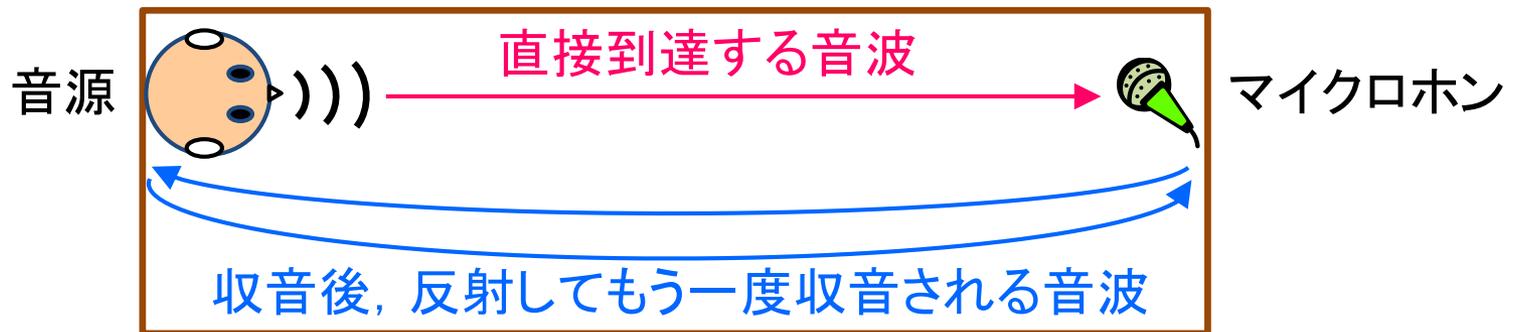


# 音波とZ変換の関係って？

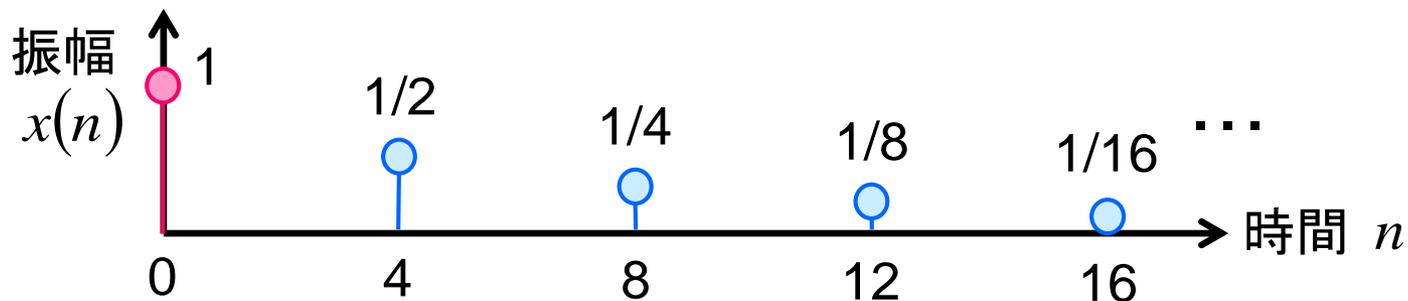
# 收音された音波とそのz変換



以下の部屋で收音された音波のz変換を考えよう



收音された時間波形をz変換してみよう



z変換

$$x(n) = 1 + \frac{1}{2} \delta(n-4) + \frac{1}{4} \delta(n-8) + \dots$$

$$X(z) = 1 + \frac{1}{2} z^{-4} + \frac{1}{4} z^{-8} + \dots$$

\*z変換がこうなる理由は省略 (少し後述)



式を変形してみよう

$$X(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-4} + \frac{1}{4}z^{-8} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2}z^{-4} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-4}}$$

音波を繰り返し  
収録した時の形

$X(z)$ の一般式を考えてみよう

$$X(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} \Rightarrow \text{例: 反射・散乱による信号の遅延により発生}$$
$$\quad \quad \quad \Rightarrow \text{例: 共振による反復的な収録により発生}$$

$X(z)$  (波 $z$ の振動の振幅(と位相))を解析してみよう

振幅が0となる波 $z$  ( $\Rightarrow Q(z)=0$ となる $z$ )

$\Rightarrow$  零点と呼ばれ, 波の打ち消しを表す

振幅が $\infty$ となる波 $z$  ( $\Rightarrow P(z)=0$ となる $z$ )

$\Rightarrow$  極と呼ばれ, 波の増幅を表す



- z変換についての疑問点について解説
  
- 疑問点①: 結局z変換って何なのか？
  - $z = a + jb$ とは, 離散時間における波を表す
  - z変換とは, 時間波形を増加/減衰・振動する波( $z$ )の足し合わせで表現する手法
  
- 疑問点②: 音波とz変換の関係って何なのか？
  - 音波の挙動によって, 式の形が変化
    - 音波が反復的に収録されると,  $X(z)$ は分母を含む
    - (音波が遅れて収録されると,  $X(z)$ は分子を含む)





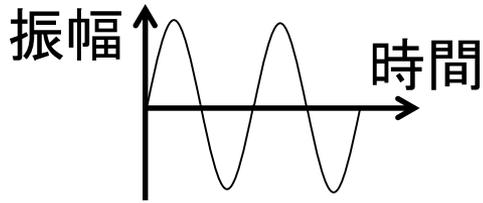
FU☆RO ☆KU

なぜ $z^{-1}$ は時間遅れを表すの？  
(なぜ時間遅れで $z^{-1}$ が生じるの？)

# 波の遅れが生み出すもの

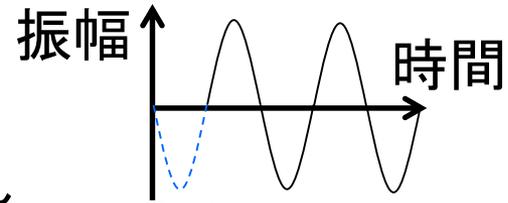


波の遅れがあると何が生み出されるのか？



$$\sin(\omega t)$$

→  
 $T$ の時間遅れ



$$\sin(\omega(t - T)) = \sin(\omega t - \theta)$$

時間遅れで  $\theta = \omega T$  が生じる

フーリエ・z変換ではどうなる？

連続時間  $T$  だけ遅れた時のフーリエ変換では...

$$\exp(j\omega t) \longrightarrow \exp(j\omega(t - T)) = \exp(j\omega t) \exp(-j\omega T)$$

離散時間  $N$  だけ遅れた時のz変換では... 時間遅れで生じる

$$\begin{aligned} z^n = \exp((\ln A + j\omega)n) &\longrightarrow \exp((\ln A + j\omega)(n - N)) \\ &= \exp((\ln A + j\omega)n) \exp(-(\ln A + j\omega)N) \\ &= \underline{z^n} z^{-N} \end{aligned}$$

時間遅れで生じる



# Acknowledgement



- 貴重なご助言・ご指導を頂きました
  - 電気通信大学 羽田 陽一様
  - NICT 岡本 拓磨様
  - NTT 鎌土 記良様
  - 音響学入門ペディア作成委員会, 学生・若手フォーラムの皆様