Q12 畳み込みって何ですか？

宮﨑　亮一
（徳山工業高等専門学校，学生若手フォーラム幹事会）

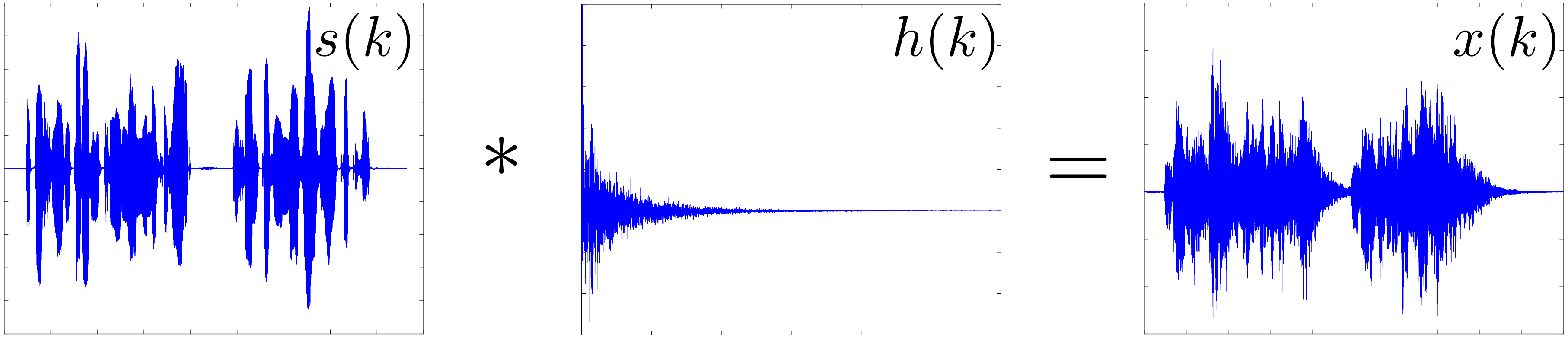
畳み込みって何？

- 画像，音響，電気回路等，様々な分野で用いられる．
  - エコー，ローパスフィルタ，・・・
- wikipediaの説明によると
  - 畳み込み（convolution）は関数 f を平行移動しながら関数 g を重ね足し合わせる二項演算

$$(f * g)(t) = \int f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

- 畳み込み定理，円状畳み込み，直線上畳み込み，・・・

例：クリーン音声とインパルス応答



クリーン音声
（反射や残響の影響がない）

インパルス応答
（部屋の反射や残響の特性）

$$x(k) = (s * h)(k) = \sum_{m=0}^{k} s(m)h(k-m)$$

残響時間の長いインパルス応答をクリーン音声に
畳み込むと，信号が伸びた（響いた）ように聞こえる

線形時不変システム

$$f(t) \longrightarrow \boxed{L} \longrightarrow L[f(t)] = g(t)$$

- 線形性

$$L[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] = C_1 L[f_1(t)] + C_2 L[f_2(t)]$$

- 時不変性

$$L[f(t-\tau)] = g(t-\tau)$$

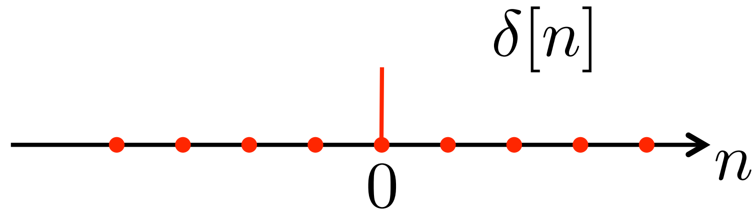
- 線形時不変システムの基本演算は畳み込み

$$g(t) = L[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = f(t) * h(t)$$

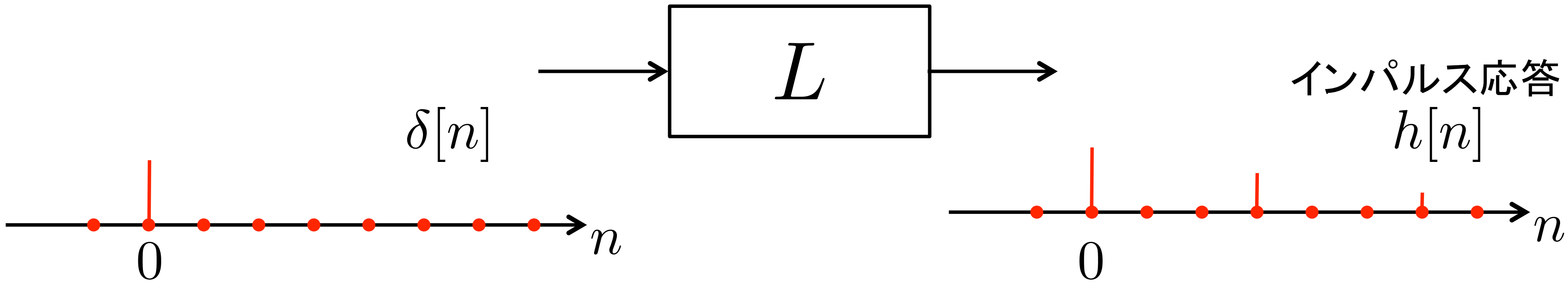
単位インパルスとインパルス応答

- まず，単位インパルス信号（連続時間の場合はデルタ関数）を考える．

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$

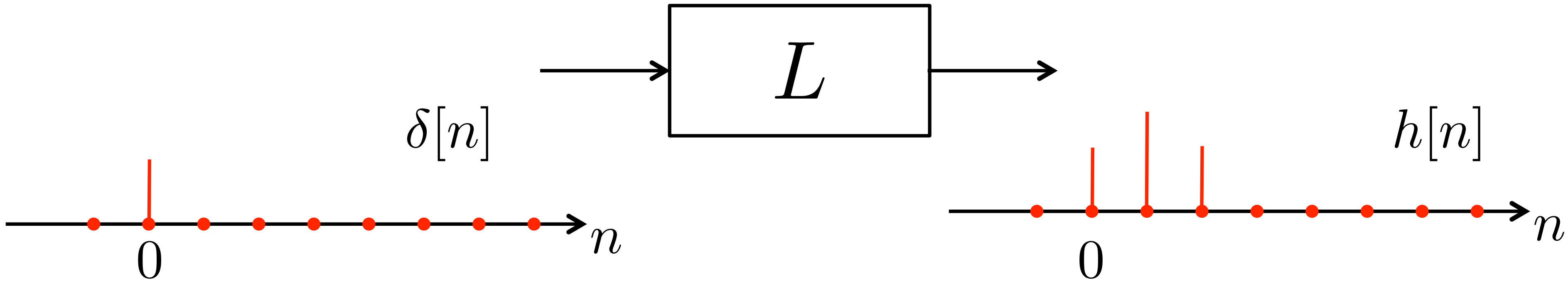


- 例：エコーをかけるシステムの場合

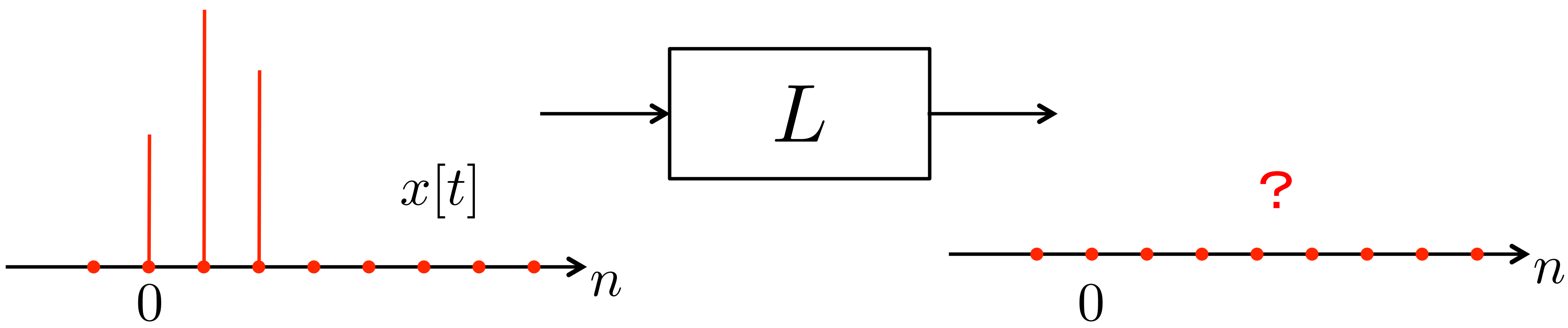


線形時不変システムを考える

- 線形時不変システムの場合
  - インパルス応答が既知であれば，あらゆる入力に対する出力を求める事ができる.

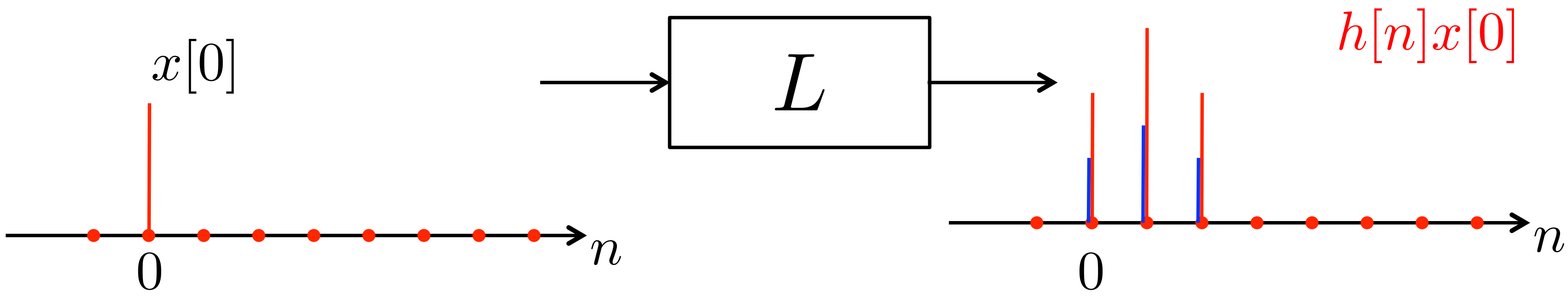


  - 入力：$\cdots, x[-1]=0, x[0]=2, x[1]=4, x[2]=3, x[3]=0, \cdots$



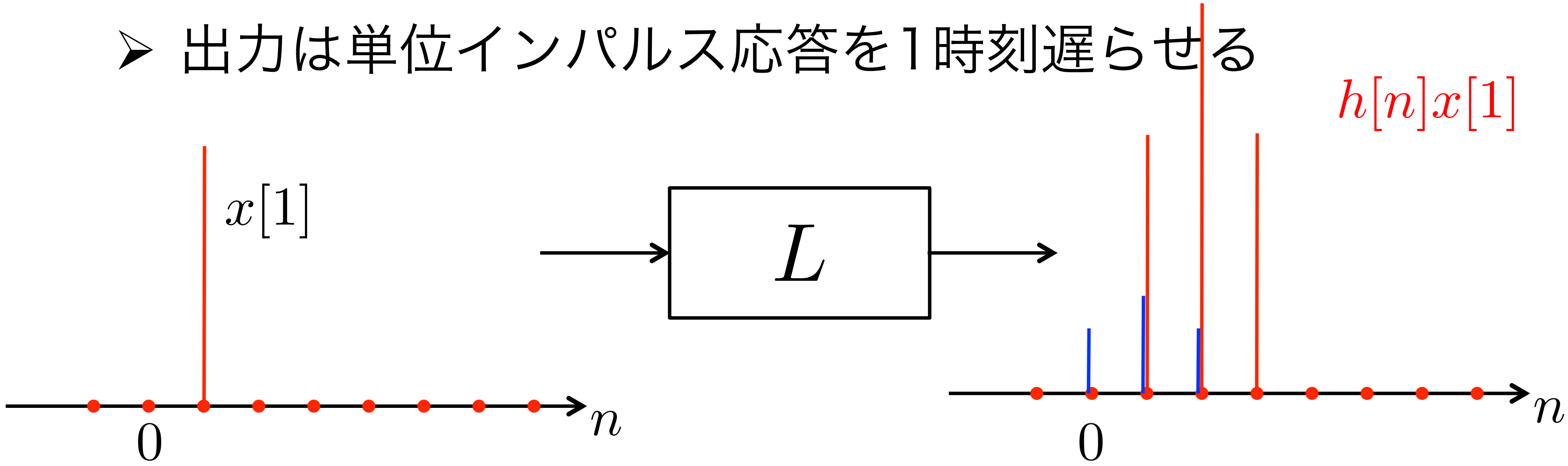
時刻 $n = 0$ のとき

- 線形性
  - $L[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] = C_1 L[f_1(t)] + C_2 L[f_2(t)]$
  - 出力は単位インパルス応答の振幅を2倍



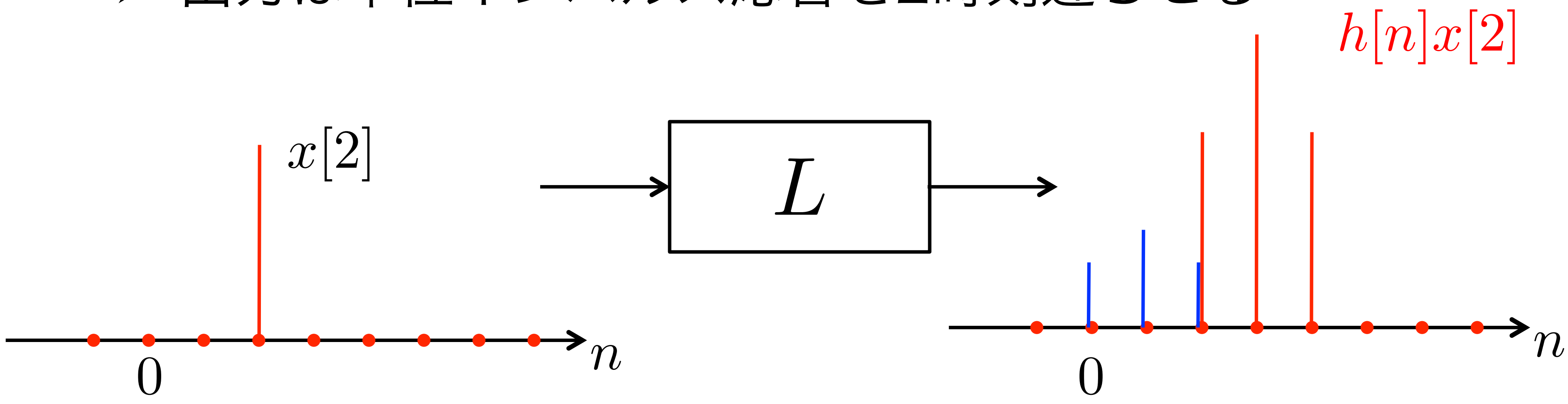
時刻 $n = 1$のとき

- 線形性
  - ➢ $L[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] = C_1 L[f_1(t)] + C_2 L[f_2(t)]$
  - ➢ 出力は単位インパルス応答の振幅を4倍
- 時不変性
  - ➢ $L[f(t-\tau)] = g(t-\tau)$
  - ➢ 出力は単位インパルス応答を1時刻遅らせる



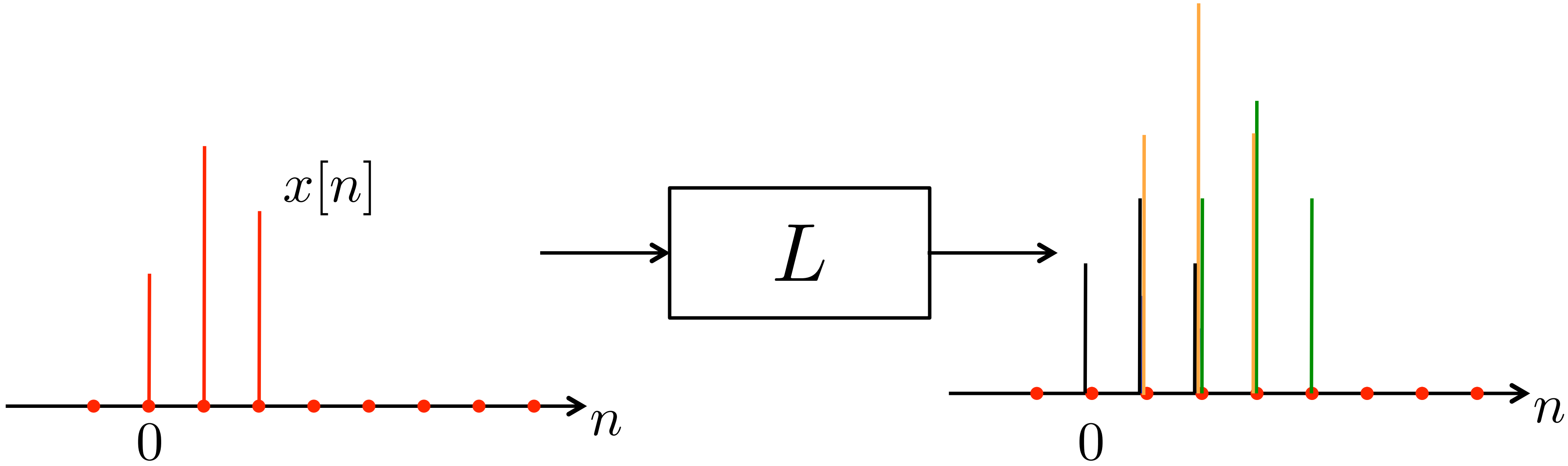
時刻 $n = 2$のとき

- 線形性
  - $L[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] = C_1 L[f_1(t)] + C_2 L[f_2(t)]$
  - 出力は単位インパルス応答の振幅を3倍
- 時不変性
  - $L[f(t-\tau)] = g(t-\tau)$
  - 出力は単位インパルス応答を2時刻遅らせる

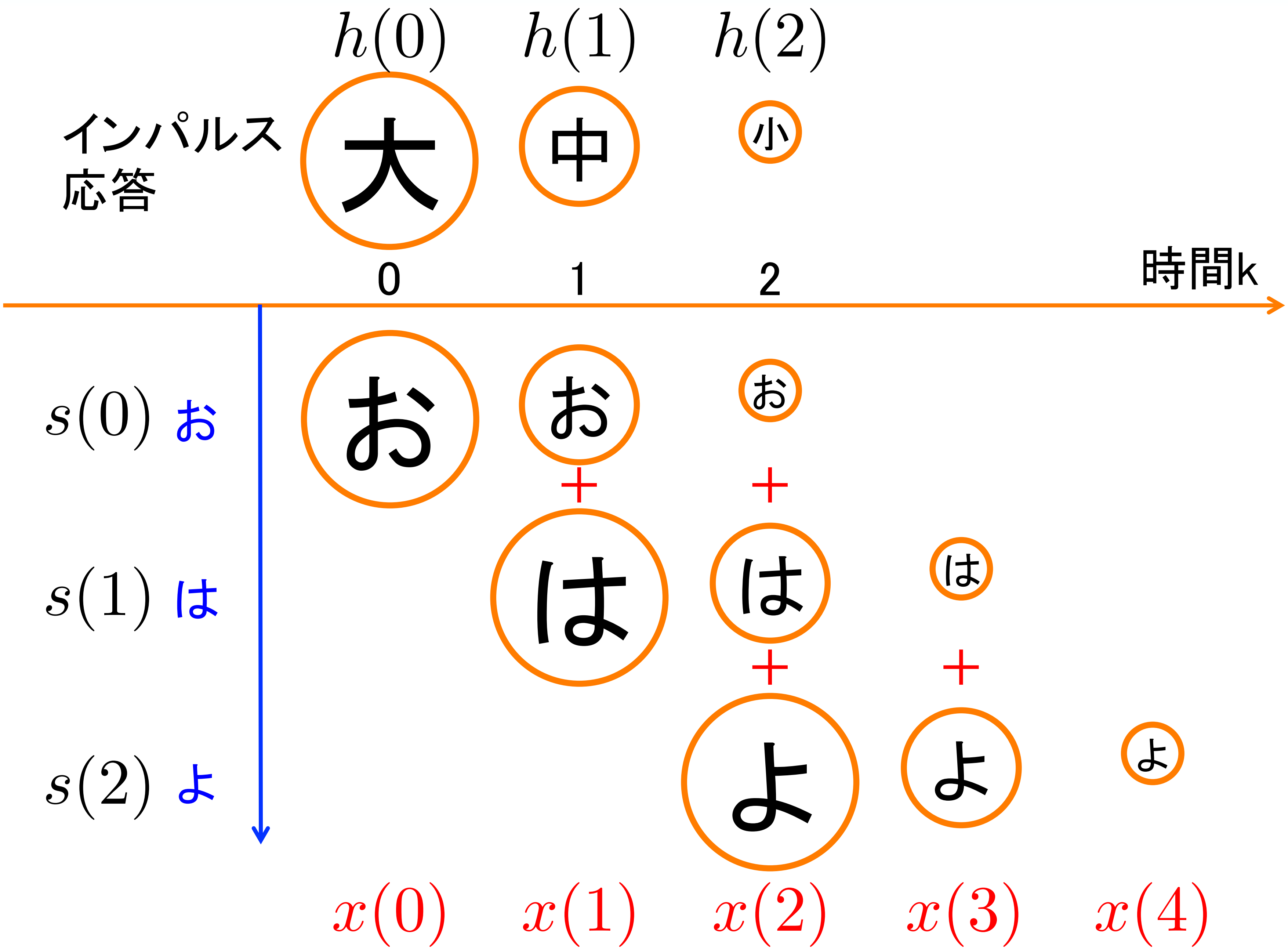


最終的な出力

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]x[m] \\
&= \sum_{m=0}^{2} h[n-m]x[m] \\
&= 2h[n] + 4h[n-1] + 3h[n-2]
\end{aligned}
$$



畳み込みの解釈


$h(0)$ $h(1)$ $h(2)$
インパルス応答
大
中
小
時間k
0
1
2
$s(0)$ お
$s(1)$ は
$s(2)$ よ
お お お
は は は
よ よ よ
+
$x(0)$ $x(1)$ $x(2)$ $x(3)$ $x(4)$

畳み込み定理

- $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$
  - $\mathcal{F}(\cdot)$ はフーリエ変換
  - ラプラス変換やz変換にも適用できる

- 略証

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(t) * g(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right] dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t) g(t-\tau) d\tau \right] dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-j\omega t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega (t-\tau)) g(t-\tau) dt \right] d\tau \\
&= \mathcal{F}(f(t))\mathcal{F}(g(t))
\end{aligned}$$

畳み込み定理

- N点の畳み込みを考える

- 畳み込み和を直接計算

$$(h * s)(k) = \sum_{m=0}^{N} h(m)s(k-m)$$

計算量: $O(N^2)$

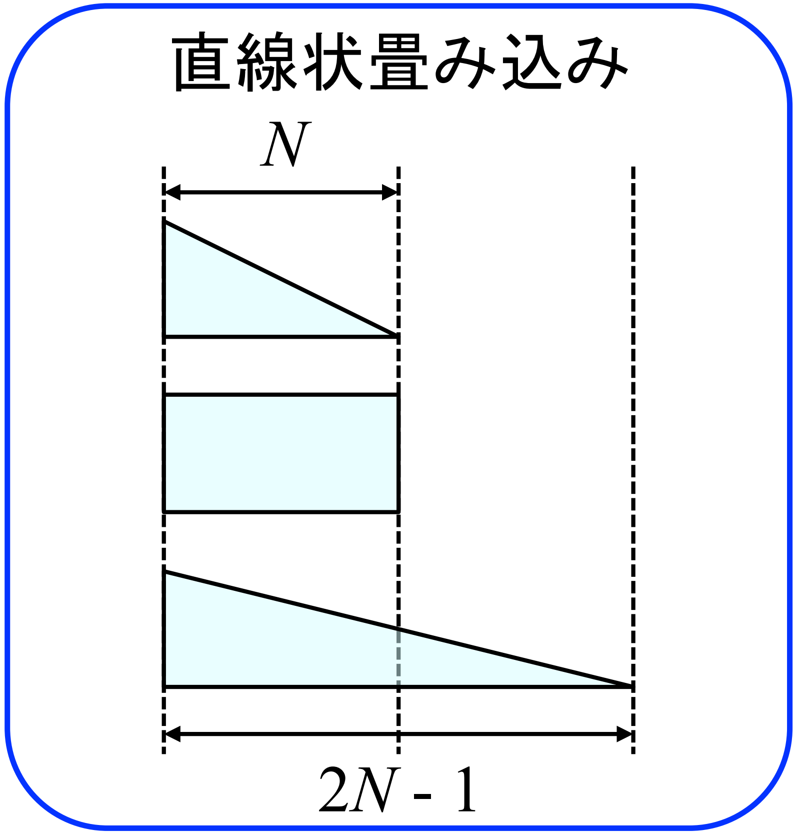
- FFT→掛け算→IFFT

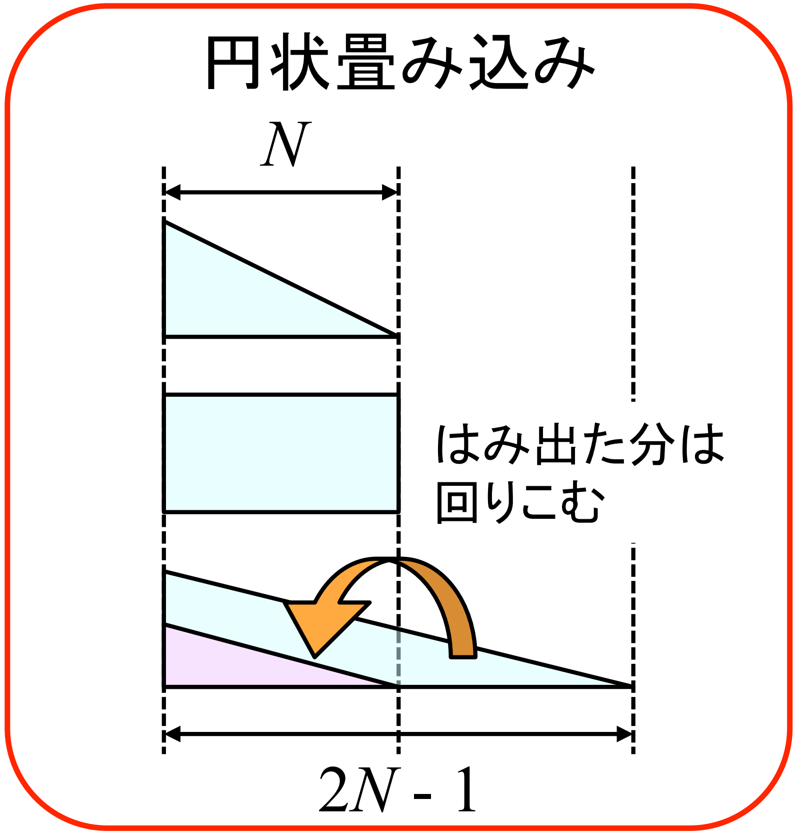
$$(h * s)(k) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(h)\mathcal{F}(s))$$

計算量: $O(N \log N)$

直線畳込みと円状畳み込み

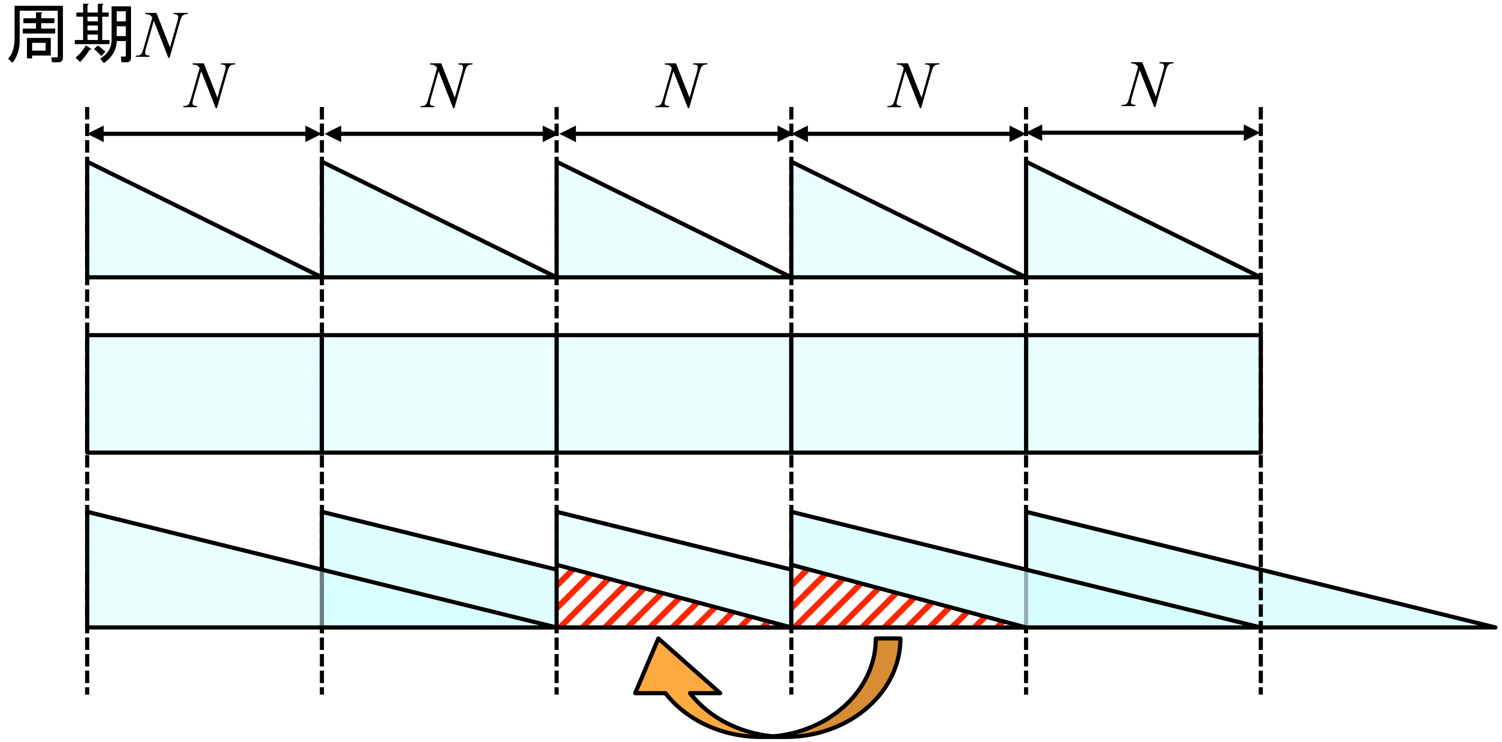
- DFTの積は，時間領域では円状畳み込みとなる．
  - DFTでは，時間領域信号を周期信号と仮定
  - フーリエ変換やz変換の積は，円状畳み込みに対応





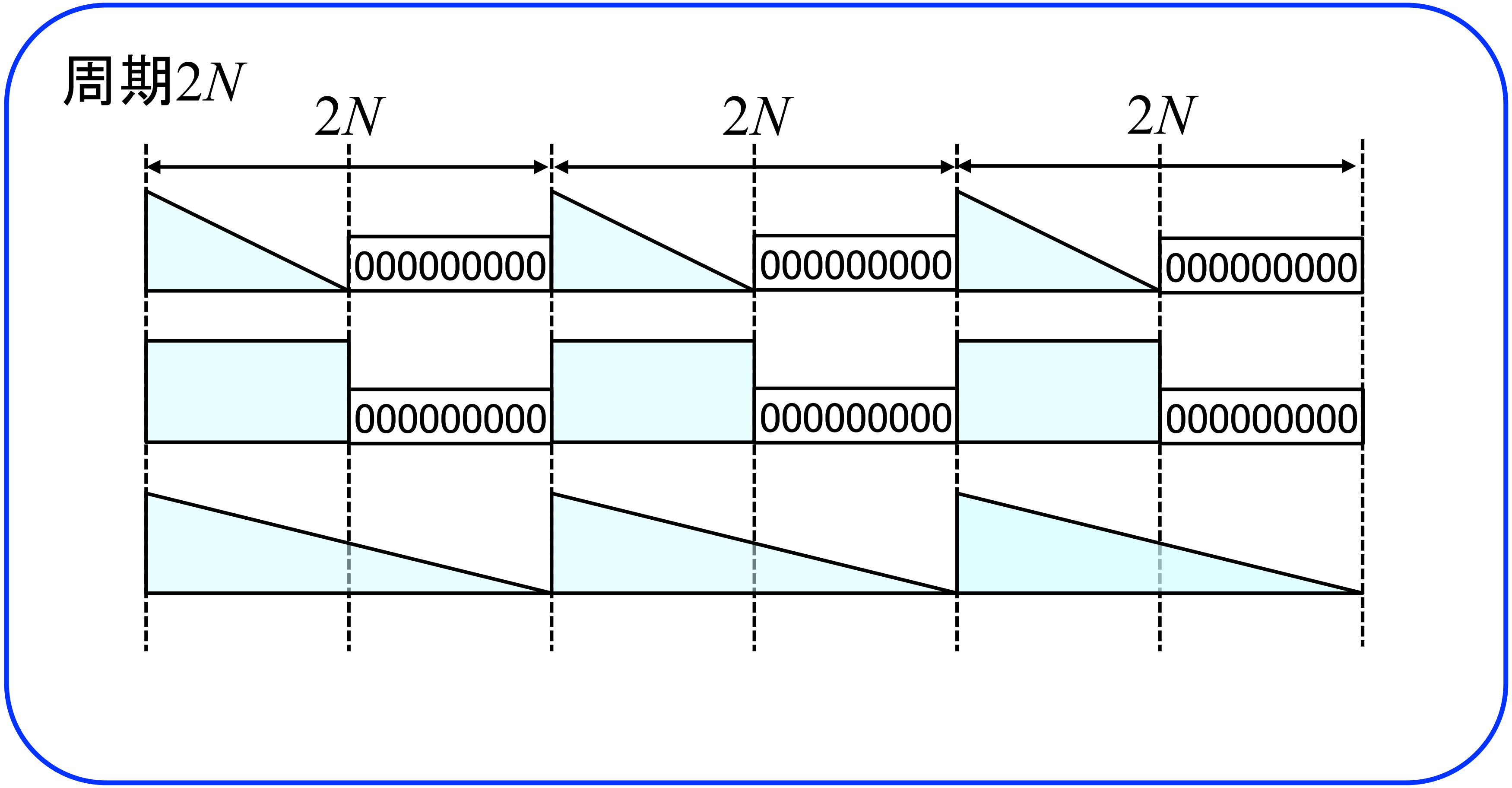
DFTの積は円状畳み込み

- DFTにおける周波数離散化
→周期的な時間波形同士の直線状畳み込みとも説明できる



DFTで直線状畳み込み

- ゼロ詰めを行うことで，実質的に直線上畳み込みの演算結果を得ることが出来る．



まとめ

- 畳み込み演算がよくわからない
  - キーワードは線形性と時不変性
- 畳み込みの定理
  - 時間領域で直接畳み込みを計算：$O(N^2)$
  - FFT→掛け算→IFFT：$O(N \log N)$
- 直線上畳込みと円状畳込み
  - DFTの積は円状畳み込み
  - DFTの積で直線上畳込みを実現するにはゼロ詰め
- 参考資料
  - ASJ技術講習会資料「ディジタル信号処理の基礎」

補足：連続量と離散量における変換関係

- 信号の一方の領域が周期的であれば，もう一方の領域では離散的な量となる．
  - 周期信号⇔離散スペクトル，　非周期信号⇔連続スペクトル
  - 連続信号⇔非周期スペクトル，　離散信号⇔周期スペクトル

	連続信号	離散信号	
周期信号	フーリエ級数展開	離散フーリエ変換	離散スペクトル
非周期信号	フーリエ変換	Z変換	連続スペクトル
	非周期スペクトル	周期スペクトル	